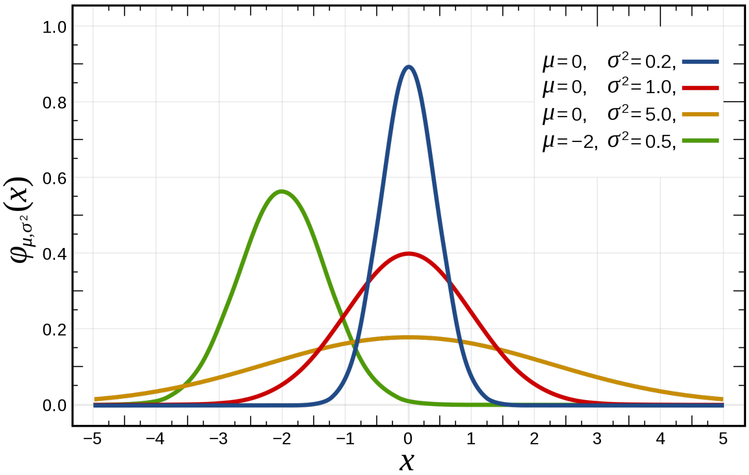
Teorie nutná ke zvládnutí cvičení 9

III.2. Centrální limitní věta

Definice (Normální rozdělení)**.** Normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ má hustotu

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{ -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$



Věta (Centrální limitní věta)**.** Máme posloupnost $X_1, X_2, \ldots$ nezávislých, stejně rozdělených náhodných veličin, pro které je $0 < \mathrm{var} X_1 < \infty$. Pak

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mathbb{E}X_1}{\sqrt{n}\sqrt{\mathrm{var} X_1}} \leq x \right) \xrightarrow{n\to\infty} \Phi(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

kde $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-x^2/2\right\} \mathrm{d}x$ je distribuční funkce normovaného normálního rozdělení $N(0,1)$.

Tabulka hodnot Φ a Φ^{-1}

Hodnoty distribuční funkce $\Phi(x)$ lze počítat jen numericky a lze je najít v následující tabulce pro $x \geq 0$. Ostatní hodnoty dopočítáme ze vztahu $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$\Phi(x)$	0.500	0.540	0.579	0.618	0.655	0.691	0.726	0.758	0.788	0.816	0.841
x		1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
$\Phi(x)$		0.864	0.885	0.903	0.919	0.933	0.945	0.955	0.964	0.971	0.977
x		2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3.0
$\Phi(x)$		0.982	0.986	0.989	0.992	0.994	0.995	0.997	0.997	0.998	0.999

Někdy se nám budou hodit hodnoty inverzní funkce, tzv. kvantily $N(0,1)$ definované jako

$$q_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha), \quad \alpha \in [0,1].$$

Ty najdeme v tabulce pro $\alpha \geq 0.5$. Ostatní hodnoty dopočítáme ze vztahu $q_\alpha = -q_{1-\alpha}$

α	0.5	0.8	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
$\Phi^{-1}(\alpha) = q_\alpha$	0	0.842	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576